Άσκηση Φυλλαδίου 27

27. Μεταβλητή δύναμη $\vec{F}$ δίνεται από τη σχέση: $\vec{F} = 2y\vec{x}_0 + xy\vec{y}_0$. Ποιό είναι το παραγόμενο έργο όταν το υλικό σημείο κινηθεί ευθύγραμμα από την αρχή των αξόνων έως το σημείο $\vec{R}_1 = 2\vec{x}_0 + \vec{y}_0$;

Το υλικό σημείο κινείται στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ & $R_1(2,1)$. Η ευθεία δίνεται από την έκφραση $y = \frac{1}{2}x$ και τότε $dy = \frac{1}{2}dx$, άρα το έργο W θα δίνεται από:

$$W = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{\text{θέση}1}^{\text{θέση}2} (F_x \bar{x}_0 + F_y \bar{y}_0) \cdot (dx\,\bar{x}_0 + dy\,\bar{y}_0) =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_x dx + F_y dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2y\,dx + xy\,dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x\,dx + \frac{1}{4}x^2 dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x + \frac{x^2}{4} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} \right]_0^2 = \frac{8}{3}\, J$$

Άσκηση Φυλ. 28

28. Να υπολογιστεί το έργο, W της δύναμης $\vec{F} = xyz(2z+3x)\vec{x}_0 + z(x^2z-3y^2+x^3)\vec{y}_0 + y(2x^2z-y^2+x^3)\vec{z}_0$ από το σημείο $A(1,0,2)$ έως το σημείο $B(2,1,3)$.

Έχουμε ότι ο στροβιλισμός της δύναμης $\bar{F}$ είναι:

$$\text{curl}\,\bar{F} = \bar{\nabla}\times\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xyz(2z+3x) & z(x^2z-3y^2+x^3) & y(2x^2z-y^2+x^3) \end{vmatrix} =$$

$$= (2x^2z - y^2 + x^3 - 2y^2 - x^2z + 3y^2 - x^3 - x^2z)\,\bar{x}_0 - (4xyz + 3x^2y - 2xyz - 3x^2y - 2xyz)\,\bar{y}_0 + (2xz^2 + 3x^2z - 2xz^2 - 3x^2z)\,\bar{z}_0 = (0,0,0) = \bar{0}$$

οπότε η $\bar{F}$ είναι συντηρητική δύναμη και $\exists\; V = V(x,y,z)$ τέτοια ώστε

$$\bar{F} = -\bar{\nabla}V \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} xyz(2z+3x) = -\dfrac{\partial V}{\partial x} & (1) \\ z(x^2z-3y^2+x^3) = -\dfrac{\partial V}{\partial y} & (2) \\ y(2x^2z-y^2+x^3) = -\dfrac{\partial V}{\partial z} & (3) \end{array}\right.$$

Από (1) $\Rightarrow V = -\int xyz(2z+3x)\,dx + g_1(y,z) = -x^2yz^2 - x^3yz + g_1(y,z)$ (4)

Από (2) $\Rightarrow V = -\int z(x^2z - 3y^2 + x^3)\,dy + g_2(x,z) = -x^2z^2y + y^3z - x^3yz + g_2(x,z)$ (5)

Από (3) $\Rightarrow V = -\int y(2x^2z - y^2 + x^3)\,dz + g_3(x,y) = -x^2yz^2 + y^3z - x^3yz + g_3(x,y)$ (6)

Από (4)–(6): $V = -x^2yz^2 + y^3z - x^3yz + C$, C: σταθερά

Άρα: $W = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \Delta V = V_1 - V_2 = V(1,0,2) - V(2,1,3) = 57\,J.$

Άσκηση Φυλ. 29

29. Υλικό σημείο μάζας $m = 1\ kg$, κινείται στο Oxy επίπεδο υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = 2\dot{x}\vec{x}_0 - 4\dot{y}\vec{y}_0$. Το σημείο ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από την ηρεμία και το διάνυσμα της ταχύτητας είναι: $\dot{\vec{r}}_0 = 2\vec{x}_0 + 5\vec{y}_0$. (i) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου. (ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του υλικού σημείου κάθε χρονική στιγμή.

(i) Από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι: $m\bar{\alpha} = \bar{F}$, όπου $\bar{F}$ είναι η συνολική δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο.

$$m\bar{\alpha} = \bar{F} \Rightarrow m(\ddot{x}\bar{x}_0 + \ddot{y}\bar{y}_0) = 2\dot{x}\bar{x}_0 - 4\dot{y}\bar{y}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 2\dot{x} \\ m\ddot{y} = -4\dot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{x} \\ \ddot{y} = -4\dot{y} \end{cases}$$

Διαφορικές εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου

(ii) $\ddot{x} = 2\dot{x}$, θέτουμε $u = \dot{x}$ οπότε:

$$\dot{u} = 2u \Rightarrow \dot{u} - 2u = 0 \Rightarrow u(t) = c_1 e^{\int 2dt} = c_1 e^{2t}, \quad c_1: \text{σταθερά}$$

οπότε $\dot{x} = c_1 e^{2t}$

$\ddot{y} = -4\dot{y}$, θέτουμε $v = \dot{y}$ οπότε:

$$\dot{v} = -4v \Rightarrow \dot{v} + 4v = 0 \Rightarrow v(t) = c_2 e^{-\int 4dt} = c_2 e^{-4t}, \quad c_2: \text{σταθερ.}$$

οπότε $\dot{y} = c_2 e^{-4t}$

Από αρχική συνθήκη έχουμε ότι, για $t = 0$: $\dot{\bar{r}}_0 = 2\bar{x}_0 + 5\bar{y}_0$

δηλαδή $\dot{x} = 2$ και $\dot{y} = 5$ οπότε $c_1 = 2$, $c_2 = 5$

άρα, $\dot{x} = 2e^{2t}$ και $\dot{y} = 5e^{-4t}$, οπότε

$$u(t) = \dot{x}\bar{x}_0 + \dot{y}\bar{y}_0 = 2e^{2t}\bar{x}_0 + 5e^{-4t}\bar{y}_0$$

30. Υλικό σημείο μάζας, m, κινείται κατά μήκος του $x-$άξονα υπό την επίδραση συντηρητικής δύναμης, δυναμικού $V(x) = \frac{k}{2}x^2$ (k, θετική σταθερά). Εάν για $t = 0$ το σημείο ξεκινά από την ηρεμία από τη θέση $x = \alpha$, να μελετήσετε την κίνησή του. Να σχεδιαστεί η τροχιά του, $x = x(t)$, με τιμές του $\alpha = 1$ και $k/m = 0.1,\ 1$ και 10 από $t = 0$ μέχρι $t = 4\pi$ (*), τι παρατηρείτε;

Αφού η δύναμη είναι συντηρητική, από τον 2ο Νόμο Νεύτωνα έχουμε ότι:

$m\ddot{x} = F_x$ (στον x-άξονα) $\Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \Rightarrow$

$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ (1)

Η (1) είναι ΣΔΕ, 2ης τάξης, 1ου βαθμού, ομογενής, με σταθερούς συντελ., με χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, i$

Η γενική λύση της Δ.Ε. (1) είναι η:

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right), \quad c_1, c_2: \text{σταθερές}$$

Για $t=0$: $x(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = \alpha$

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}\,c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \sqrt{\frac{k}{m}}\,c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

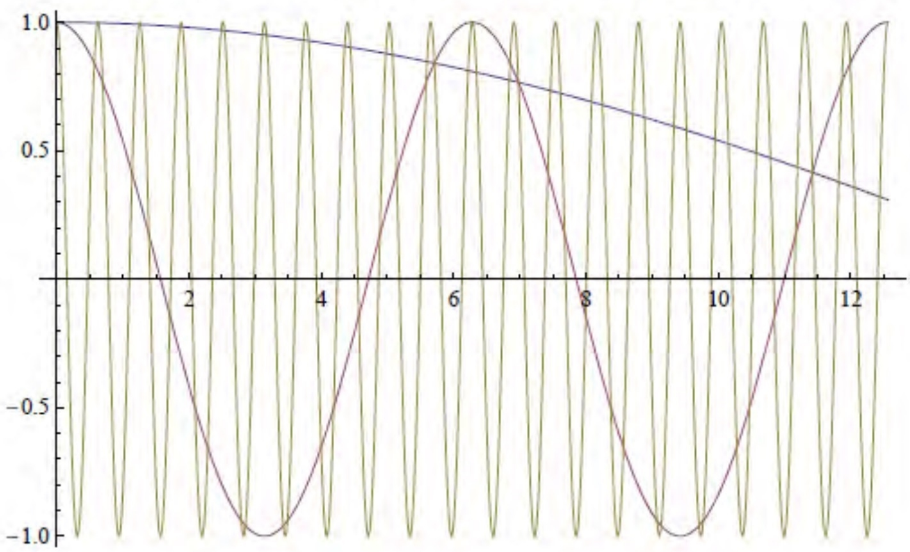
Επειδή το υλικό σημείο ξεκινάει από την ηρεμία:

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}\,c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0, \text{ άρα } \boxed{x(t) = \alpha\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$$

Για την τροχιά του υλικού σημείου, $x = x(t)$, με τιμές $\alpha = 1$ κ' $\frac{k}{m} = 0.1$, 1 και 10 από $t=0$ μέχρι $t = 4\pi$ έχουμε σχηματικά:

```
In[10]:= a = 1; km1 = 0.1; km2 = 1; km3 = 10;
         Plot[{a Cos[km1 t], a Cos[km2 t], a Cos[km3 t]}, {t, 0, 4 Pi}]
```

Out[10]=



Παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται ο λόγος $\frac{k}{m}$, μειώνεται η περίοδος της ταλάντωσης.

Άσκηση Φυλ. 31

31. Υλικό σημείο μάζας $m = 4\ kg$, κινείται κατά μήκος του $x-$άξονα υπό την επίδραση της δύναμης $F(x) = 2x - 3x^2$. (i) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της τροχιάς του υλικού σημείου και να μελετηθούν (ασταθή ή ευσταθή σημεία ισορροπίας). (ii) Να βρεθεί αν υπάρχει και κάτω από ποιές προϋποθέσεις το δυναμικό $V(x)$ της $F(x)$, $(x \in [0, +\infty)$ και $V(0) = 1)$. (iii) Να παρασταθεί γραφικά το δυναμικό της $F(x)$ συναρτήσει του x στο διάστημα $[0, +\infty)$ (*).

(i) Για τα σημείο ισορροπίας ισχύει ότι:

$$F(x)=0 \Rightarrow 2x-3x^2=0 \Rightarrow x(2-3x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Από το 2ο Νόμο Νεύτωνα παίρνουμε την εξίσωση κίνησης του υλικού σημείου: $m\ddot{x} = F_x \Rightarrow m\ddot{x} = 2x-3x^2$ (για τον x-άξονα), (1)

α) Για $x_0=0$: Η Δ.Ε. (1) για μια μικρή διαταραχή από την θέση ισορροπίας, γίνεται:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_0+x_1) = 2(x_0+x_1) - 3(x_0+x_1)^2 \underset{(x_0=0)}{\Rightarrow} \ddot{x}_1 = \frac{1}{m}(2x_1-3x_1^2) \quad (2)$$

Αναπτύσσω κατά Taylor το δεξί μέλος της (2) και διατηρώ όρους πρώτης τάξης: $2x_1-3x_1^2 = 0+2x_1-3x_1^2+\ldots \simeq 2x_1$

οπότε η (2) γίνεται (βάση της πάνω σχέσης): $\ddot{x}_1 = \frac{1}{m}2x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{x}_1 - \frac{2}{m}x_1 = 0$, ΣΔΕ, 2ης τάξης, 1ου βαθμ., ομογενής κ' γραμμική, γύρω από το σημείο ισορροπίας, $x_0=0$

Επειδή το $-\frac{2}{m}<0$, το σημείο ισορροπίας $(x_0=0)$ είναι ασταθές

β) Για $x_0=\frac{2}{3}$: Η Δ.Ε. (1) για μια μικρή διαταραχή από το σημείο ισορροπίας $\left(x_0=\frac{2}{3}\right)$, γίνεται:

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m}\left[2\left(\frac{2}{3}+x_1\right)-3\left(\frac{2}{3}+x_1\right)^2\right] \quad (3)$$

Αναπτύσσω κατά Taylor το δεξί μέλος της (3) και διατηρώντας όρους πρώτης τάξης: $2\left(\frac{2}{3}+x_1\right)-3\left(\frac{2}{3}+x_1\right)^2 = -2x_1-3x_1^2$

αναπτ. Taylor: $-\frac{8}{3}-6x_1$, άρα η (1) γίνεται:

$$\ddot{x}_1+\frac{6}{m}x_1+\frac{8}{3m}=0$$, επειδή $\frac{6}{m}>0$, το $x_0=\frac{2}{3}$ είναι

ευσταθές σημείο ισορροπίας.

(ii) Πρώτα βλέπουμε ότι: curl $\bar{F} = \bar{\nabla} \times \bar{F} = \bar{0}$, άρα $\exists\, V$ εδώ $V(x)$ όταν $x \in [0,+\infty)$ τ.ω. $F(x) = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V(x) = -\int F(x)\,dx + C' =$

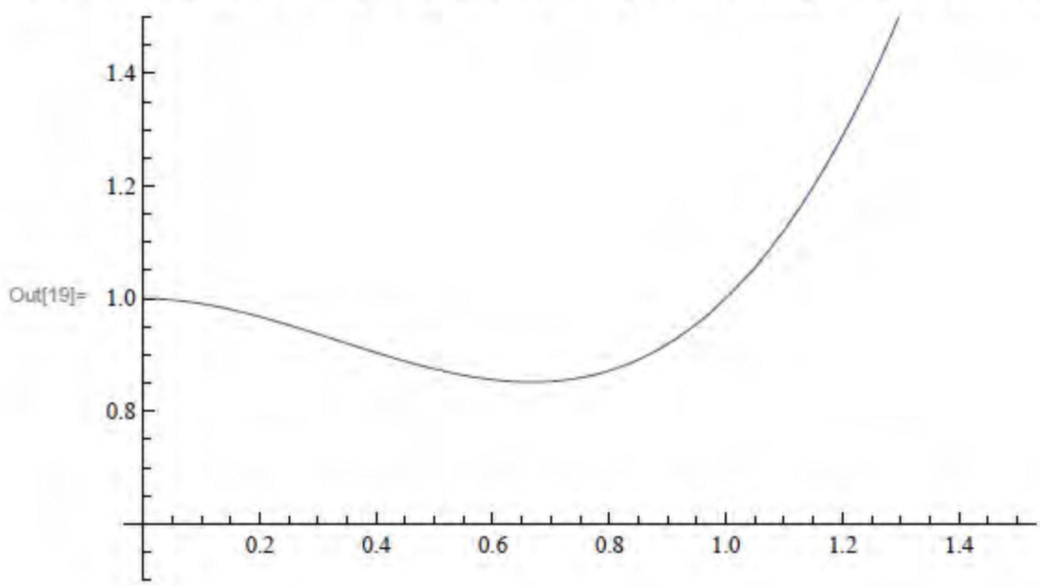
$$= -\int (2x-3x^2)\,dx + C' \Rightarrow V(x) = x(x^2-x) + C'$$

Για $V(0)=1 \Rightarrow C'=1$, άρα η συνάρτηση δυναμικού γράφεται:

$$V(x) = x(x^2-x)+1, \quad x \in [0,+\infty).$$

(iii) Για να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση δυναμικού $V(x)$ έχουμε ότι:

```
In[19]:= Plot[x (x^2 - x) + 1, {x, 0, 1.5}, PlotRange → {0.5, 1.5}]
```



Άσκηση Φυλ. 32

32. Σε υλικό σημείο μάζας, $m = 1\ kg$, ασκείται δύναμη $F(x) = -kx + \alpha x^3$ με $k > 0$ και $\alpha > 0$. Να γραφεί η διαφορική εξίσωση κίνησης για το υλικό σημείο, να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της κίνησης του και να μελετηθούν (ασταθή ή ευσταθή σημεία ισορροπίας). Να βρεθεί το δυναμικό της $F(x)$ και να παρασταθεί γραφικά για $k = \alpha = 1$ και $V(0) = 1$ (*).

Από 2ο Ν.Ν παίρνουμε τη Δ.Ε κίνησης: $m\bar{\alpha} = \bar{F} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -kx + \alpha x^3 \xrightarrow[(m=1kg)]{} \ddot{x} = -kx + \alpha x^3 \quad (1)$$

- Για τα σημεία ισορροπίας: $F(x) = 0 \Rightarrow x(-k + \alpha x^2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ -k + \alpha x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{k}{\alpha}} \end{cases}$$ 3 σημεία ισορροπίας.

α) Για $x_0 = 0$: η Δ.Ε (1) για μικρή διαταραχή γύρω από το $x_0 = 0$ είναι: $\dfrac{d^2}{dt^2}(x_0 + x_1) = -k(x_0 + x_1) + \alpha(x_0 + x_1)^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = -kx_1 + \alpha x_1^3 \xrightarrow[\text{(ανάπτυγμα Taylor)}]{} \ddot{x}_1 = -kx_1$$, άρα η γραμμικοποιημένη Δ.Ε γύρω από το $x_0 = 0$ είναι: $\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$

και επειδή $k > 0$, το $x_0 = 0$ είναι <u>ευσταθές</u> σημείο ισορροπίας.

β) Για $x_0 = -\sqrt{\dfrac{k}{\alpha}}$: η Δ.Ε (1) για μικρή διαταραχή γύρω από το $x_0 = -\sqrt{\dfrac{k}{\alpha}}$ είναι:

$$\ddot{x}_1 = -k\left(-\sqrt{\frac{k}{\alpha}} + x_1\right) + \alpha\left(-\sqrt{\frac{k}{\alpha}} + x_1\right)^3 \xrightarrow[\text{(ανάπτυγμα Taylor)}]{}$$

$\Rightarrow \ddot{x}_1 = -2kx_1$, άρα η γραμμικοποιημένη Δ.Ε γύρω από το $x_0 = -\sqrt{\dfrac{k}{\alpha}}$ είναι: $\ddot{x}_1 - 2kx_1 = 0$, και επειδή το $-2k < 0$, το $x_0 = -\sqrt{\dfrac{k}{\alpha}}$ είναι <u>ασταθές</u> σημείο ισορροπίας.

γ) Για $x_0 = \sqrt{\dfrac{k}{\alpha}}$, με όμοια διαδικασία βρίσκουμε ότι το $x_0 = \sqrt{\dfrac{k}{\alpha}}$ είναι <u>ασταθές</u> σημείο ισορροπίας.

• Για το δυναμικό V της $\bar{F}$ πρέπει πρώτα να δ.ο. η $\bar{F}$ είναι συντηρητική δύναμη, τότε $\exists\, V(x)$: $F(x) = -\dfrac{dV}{dx} \Rightarrow V(x) = -\int F(x)dx + C \Rightarrow$

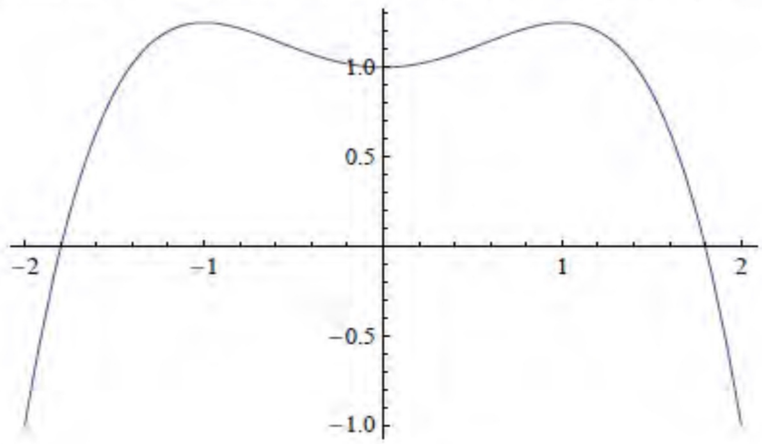
$$\Rightarrow V(x) = -\int(-kx+\alpha x^3)dx + C \Rightarrow V(x) = -\frac{\alpha x^4}{4} + \frac{kx^2}{2} + C$$

Για $V(0)=1$ κ' $k=\alpha=1$ γίνεται: $V(x) = -\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} + 1$

• Για την γραφική παράσταση του δυναμικού $V(x)$ έχουμε ότι:

```
In[20]:= Plot[-x^4 / 4 + x^2 / 2 + 1, {x, -2, 2}, PlotRange → All]
```

Out[20]=



Ασκηση Φυλ. 33

33. Υλικό σημείο κινείται στην επιφάνεια: $z = 2\sin(x+y)$, με την επίδραση του βάρους, $\vec{B} = -mg\vec{z}_0$. Σε ποιές θέσεις ισορροπεί το υλικό σημείο;

Το υλικό σημείο κινείται στην επιφάνεια $z = 2\sin(x+y)$ $(*)$ με την επίδραση του βάρους $\bar{B} = -mg\bar{z}_0$, άρα εκτελεί αναγκαστική κίνηση με $f(x,y,z) = z - 2\sin(x+y) = 0$

Η δεσμική δύναμη $\bar{F}_\delta = \lambda \bar{\nabla} f = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bar{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{z}_0\right) =$

$= \lambda\left(-2\cos(x+y)\bar{x}_0 - 2\cos(x+y)\bar{y}_0 + \bar{z}_0\right)$

Η επιβεβλημένη δύναμη $\vec{F}_\varepsilon = -mg\bar{z}_0$

οπότε $\Sigma\bar{F} = \bar{F}_\delta + \bar{F}_\varepsilon = -2\lambda\cos(x+y)\bar{x}_0 - 2\lambda\cos(x+y)\bar{y}_0 + (\lambda - mg)\bar{z}_0$.

Για τις θέσεις ισορροπίας ισχύει: $\Sigma\bar{F} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\lambda\cos(x+y) = 0 \quad (1) \\ -2\lambda\cos(x+y) = 0 \quad (2) \\ \lambda - mg = 0 \Rightarrow \lambda = mg \quad (3) \end{cases}$$

$(1),(2) \Rightarrow \cos(x+y) = 0 \Rightarrow x+y = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \quad (4)$

Άρα η $(*)$ δίνει: $z = 2\sin(x+y) \overset{(4)}{=} 2\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = \pm 2$

Άσκηση Φυλ. 34

34. Μέσα σε ποτάμι η ταχύτητα ροής $\vec{u}_2 = u_2\vec{x}_0$, ($u_2 =$ σταθερά), είναι παράλληλη προς τις όχθες και βάρκα (υλικό σημείο) M, κινείται με σχετική ταχύτητα σταθερού μέτρου u_1. Η ταχύτητα $\vec{u}_1$ διευθύνεται πάντοτε προς το σημείο O της όχθης. Η βάρκα ξεκινάει από το σημείο M_0, όπου $OM_0 = r_0^*$ και $\vec{r}_0^* \perp Ox$ (Σχήμα 32). Να βρεθεί η εξίσωση της απόλυτης τροχιάς της βάρκας σε πολικές συντεταγμένες.

Γενικά ισχύει ότι: $\bar{u} = \bar{u}_{O'} + \bar{u}_M + \bar{\omega} \times \overline{O'M}$ (1)

όπου $\bar{u}$ = απόλυτη ταχύτητα του Μ, $\bar{u}_{O'}$ = ταχύτητα της αρχής Ο'

$\bar{u}_M$ = σχετική ταχύτητα του Μ, $\bar{\omega}$ = γωνιακή ταχ. του κινητού ως προς το ακίνητο σύστημα.

Λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\bar{u}_{O'} = \bar{u}_2, \quad \bar{u}_M = \bar{u}_1, \quad \bar{\omega} = 0 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) στην (1) λαμβάνουμε: $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ (3)

Επίσης είναι: $\bar{u} = \dot{r}\bar{r}_0 + r\dot{\theta}\bar{\theta}_0$ (σε πολικές) (4)

οπότε $\bar{u}_1 = -u_1\bar{r}_0$ (5)

και $\bar{u}_2 = u_2\cos\theta\,\bar{r}_0 - u_2\sin\theta\,\bar{\theta}_0$ (6)

Αντικαθιστώντας τις (4),(5) και (6) στην (3) λαμβάνουμε:

$$\dot{r}\bar{r}_0 + r\dot{\theta}\bar{\theta}_0 = -u_1\bar{r}_0 + u_2\cos\theta\,\bar{r}_0 - u_2\sin\theta\,\bar{\theta}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = -u_1 + u_2\cos\theta, & (7) \\ \text{και} & \\ r\dot{\theta} = -u_2\sin\theta, & (8) \end{cases}$$

από την (8) λαμβάνουμε: $\dot{\theta} = -\dfrac{u_2\sin\theta}{r}$. (9)

Η (7) γράφεται: $\dfrac{dr}{dt} = -u_1 + u_2\cos\theta \Rightarrow \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -u_1 + u_2\cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = -u_1 + u_2\cos\theta \qquad (10)$$

Αντικαθιστώντας την (9) στη (10) έχουμε ότι:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r}{u_2\sin\theta}(u_2\cos\theta - u_1) \Rightarrow \frac{dr}{r} = \left(\frac{u_1}{u_2}\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta \qquad (11)$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας την (11) λαμβάνουμε:

$$\ln r = \frac{u_1}{u_2}\ln\tan\frac{\theta}{2} - \ln\sin\theta + c, \quad c: \text{σταθερά}$$

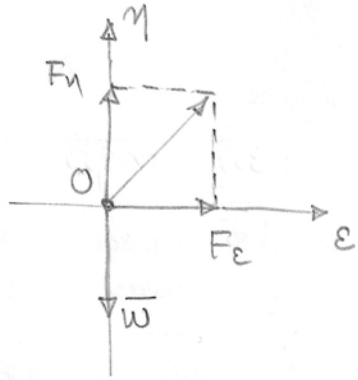
Επειδή για $r = r_0^*$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ έχουμε ότι $\ln r_0 = c$

Ασκηση Φυλ. 35

35. Σκιέρ (υλικό σημείο) ολισθαίνει πάνω στη ράμπα του σχήματος (Σχήμα 33) που δίνεται από την έκφραση $y = 0.005x^2 - 200$. Να προσδιοριστεί η κάθετη δύναμη, που ασκείται στο υλικό σημείο μάζας, $m = 70\ kg$, την στιγμή που φτάνει στο σημείο A, το τέλος της ράμπας, όπου το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $22\ m/s$. Ποιά είναι η επιτάχυνση του υλικού σημείου στο σημείο A; Η ακτίνα καμπυλότητας δίνεται από τη σχέση: $\rho(x) = \sqrt{(1 + y'^2(x))^3}/y''(x)$.

Ο σκιέρ ολισθαίνει πάνω στην $y(x) = 0{,}005x^2 - 200$, οπότε

$y'(x) = 0{,}01x$ και $y''(x) = 0{,}01$



Για $\Theta = 0$: οι δυνάμεις πάνω στον σκιέρ είναι: σε φυσικό σύστημα συντεταγμένων

Σε φυσικό σύστημα συντεταγμένων $\tan\Theta = y'(x)$

Ο νόμος του Νεύτωνα στην η-διεύθυνση είναι:

$$m\alpha_\eta = F_\eta - w_\eta \Rightarrow F_\eta = mg\cos\Theta + m\frac{|\bar{u}|^2}{\rho(x)}$$

$\tan\Theta = y'(0) = 0 \Rightarrow \Theta = 0$ και $\rho(0) = 100$

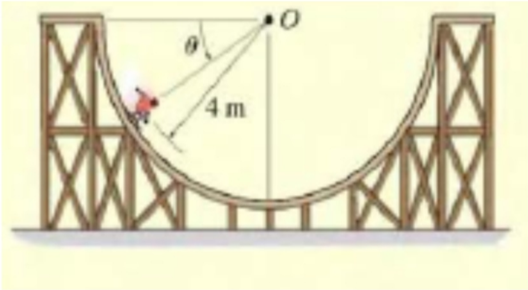
άρα $F_\eta = mg + m\dfrac{|\bar{u}|^2}{\rho(x)} = 1038{,}8\ (Nt)$

$$|\bar{\alpha}_{καντρ}| = \frac{|\bar{u}|^2}{\rho(x)} = 4.84\ (m/s^2)$$

Τέλος: $|\bar{\alpha}| = \sqrt{|\bar{\alpha}_{καντρ}|^2 + |\bar{\alpha}_{επιτρ}|^2}$

Άσκηση Φυλ. 36

36. Υλικό σημείο μάζας, $m = 60\ kg$, ολισθαίνει στην κυκλική ράμπα του σχήματος (Σχήμα 34) ξεκινώντας από την θέση A, όπου $\theta = 0^0$. Να προσδιοριθεί το μέγεθος της κάθετης δύναμης (αντίδρασης) που ασκεί η κυκλική ράμπα στο υλικό σημείο όταν $\theta = 60^0$.



Σχήμα 34: Υλικό σημείο μάζας, $m = 60\ kg$, ολισθαίνει στην κυκλική ράμπα του σχήματος ξεκινώντας από την θέση A, όπου $\theta = 0^0$.

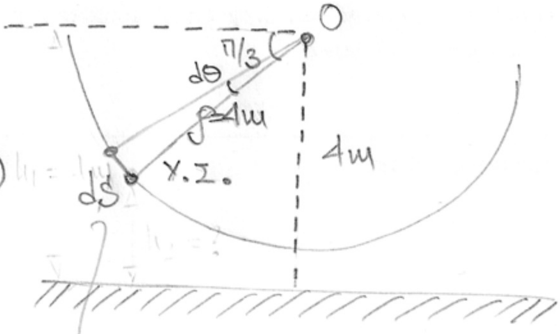
Για να υπολογίσουμε το μέγεθος της κάθετης δύναμης όταν το υλικό σημείο βρίσκεται σε γωνία $\Theta = 60^\circ$ έχουμε:

Από 2ο Ν.Ν. στις φυσικές συντεταγμένες:

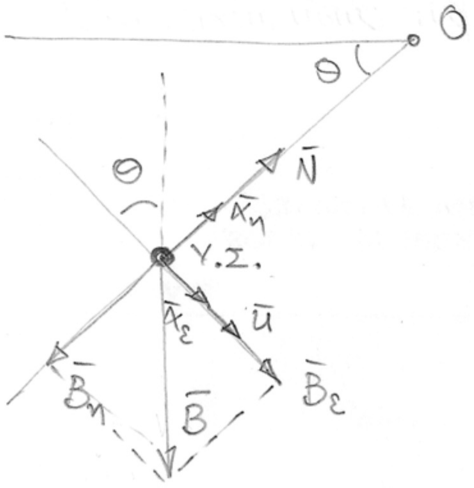
$$\Sigma F_n = m a_n \Rightarrow N - B_n = m a_n \quad (1)$$

$$\Sigma F_\varepsilon = m a_\varepsilon \Rightarrow B_\varepsilon = m a_\varepsilon \quad (2)$$

ή σχηματικά έχουμε:



$$dS = \rho d\theta = 4 d\theta$$



① : $N = B_n + m\alpha_n =$

$= mg\sin\theta + m\dfrac{|\bar u|^2}{\rho}$ ③ $\quad \rho =$ ακτίνα ράμπας

② : $B_\varepsilon = m\alpha_\varepsilon \Rightarrow \cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}\alpha_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_\varepsilon = g\cos\theta$ ④

Επειδή: $|\bar u|\,d|\bar u| = |\bar\alpha_\varepsilon|\,ds$ (βλέπε άσκηση φυλ. 39, Κεφάλαιο Ι)
απ' εδώ και πέρα θα γράφουμε: $|\bar u| = u$, $|\bar\alpha_\varepsilon| = \alpha_\varepsilon$

$$\int_0^u u\,du = \int_0^\theta g\cos\theta\,ds \Rightarrow$$

(αρχική συνθήκη, για $\theta = 0$ το μέτρο της ταχ. $u = 0$, επίσης $ds = \rho d\theta = 4d\theta$)

$$\Rightarrow \frac{u^2}{2}\Big|_0^u = \int_0^{\pi/3} \underset{\underset{10}{\parallel}}{g}\cos\theta(4d\theta) \Rightarrow \frac{u^2}{2} - 0 = \int_0^{\pi/3} 40\cos\theta\,d\theta \Rightarrow$$

$g \simeq 10\,m/s^2$

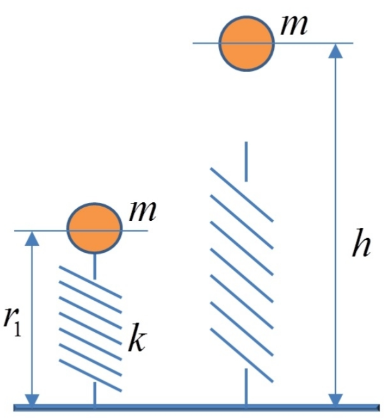
$$\Rightarrow \frac{u^2}{2} = 40\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow u^2 = 80\sin\frac{\pi}{3} = 40\sqrt{3}\ (m/s) \quad (5)$$

Τέλος, αντικαθιστώντας την ⑤ στην ③ μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίδραση, όταν $\theta = 60°$ ή $\frac{\pi}{3}$ ακτίνια:

$$N = 60\,10\sin\frac{\pi}{3} + 60\frac{80}{4}\sin\frac{\pi}{3} = (600 + 1200)\sin\frac{\pi}{3} = 900\sqrt{3}\ (Nt)$$

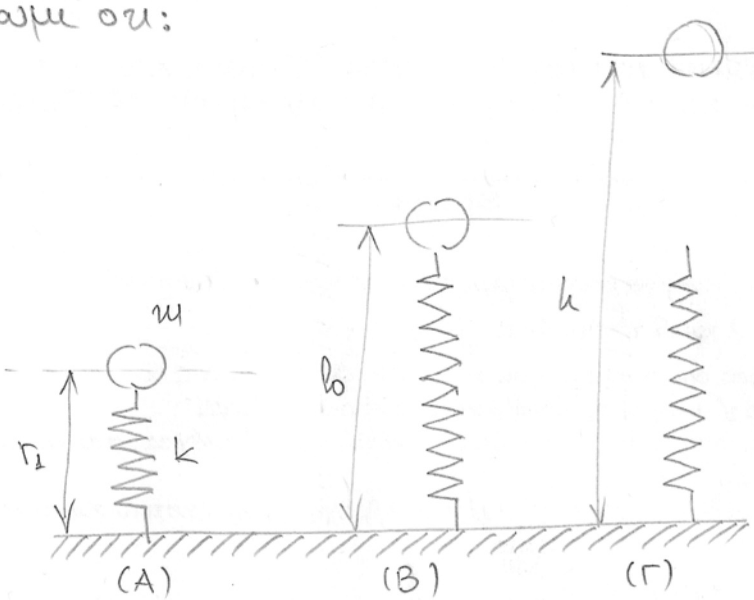
Άσκηση Φυλ. 37

37. Το ελατήριο του σχήματος κρατείται συσπειρωμένο κατά $r_1 = 0.7\ m$ με σχοινί (αρχικό μήκος ελατηρίου $l_0 = 1\ m$). Στην κορυφή του το ελατήριο έρχεται σε επαφή με την σημειακή μάζα, $m = 2\ kg$ (Σχήμα 35, η μάζα του ελατηρίου θεωρείται αμελητέα). Αν κοπεί το σχοινί σε ποιό ύψος h, από το έδαφος θα φτάσει η μάζα, m, και ποιό είναι το έργο, W, που παράγεται ή καταναλώνεται; ($k = 200\ Nt/m$, $g \simeq 10\ m/s^2$).



Σχήμα 35: Σχήμα άσκησης 37, κεφ II. Το ελατήριο του σχήματος κρατείται συσπειρωμένο με σχοινί. Στην κορυφή του το ελατήριο έρχεται σε επαφή με σημειακή μάζα (η μάζα του ελατηρίου θεωρείται αμελητέα.

Σχηματικά έχουμε ότι:



Επειδή όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στη σημειακή μάζα είναι συντηρητικές (βάρος, δύναμη ελατηρίου) μπορούμε να εφαρμόσουμε Αρχή Διατήρησης της Μηχ. Ενέργειας (ΑΔΜΕ)

ΑΔΜΕ από (Α) $\rightarrow$ (Γ): $T_A + \Sigma V_A = T_\Gamma + V_\Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow T_A + V_{A\,\beta\acute{\alpha}\rho o \upsilon \varsigma} + V_{A\,\varepsilon\lambda\alpha\tau} = T_\Gamma + V_\Gamma$, στις θέσεις (Α) & (Γ) η μάζα δεν έχει κινητική ενέργεια, δηλ. $T_A = T_\Gamma = 0$, έχει κινητική μόνο στη θέση (Β), δηλ. $T_B \neq 0$, οπότε:

$$\cancelto{0}{T_A} + mgr_1 + \frac{1}{2}k(l_0 - r_1)^2 = \cancelto{0}{T_\Gamma} + mgh \quad (1)$$

$\Rightarrow$ απ' εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε το h: $mgr_1 + \frac{1}{2}k(l_0-r_1)^2 = mgh \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \frac{mgr_1 + \frac{1}{2}k(l_0-r_1)^2}{mg} \Rightarrow h = 1.15\ m$$

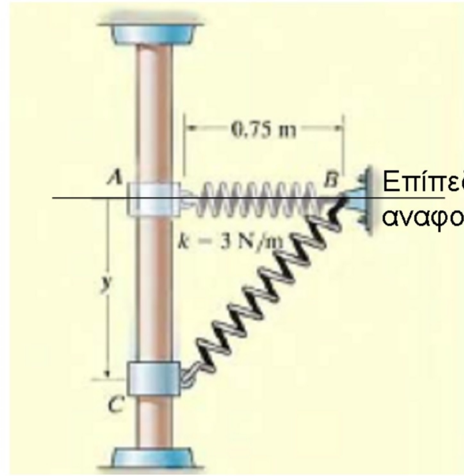
Επειδή οι δυνάμεις είναι συντηρητικές το έργο $W = \Delta V \Rightarrow$

$$\Rightarrow W = V_{(A)} - V_{(B)} = mgr_1 + \frac{1}{2}k(l_0-r_1)^2 - mgh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = mg(r_1 - h) + \frac{1}{2}k(l_0-r_1)^2 \Rightarrow W = 3\ J.$$

Άσκηση Φυλ. 38

38. Δακτυλίδι μάζας, $m = 2\ kg$, ολισθαίνει σε κατακόρυφη ράβδο. Αν το ελατήριο είναι ασυμπίεστο όταν το δακτυλίδι βρίσκεται στη θέση A, (Σχήμα 36) να προσδιοριστεί το μέτρο της ταχύτητας, u_C, και η φορά με την οποία κινείται το δακτυλίδι όταν $y = 1\ m$, στις περιπτώσεις: (i) αν αρχικά στο σημείο A ηρεμεί και (ii) αν αρχικά στο σημείο A έχει ταχύτητα μέτρου $u_A = 2\ m/s$ και φοράς προς τα κάτω ($k = 3\ Nt/m$).



Σχήμα 36: Σχήμα άσκησης 38, κεφ II. Δακτυλίδι μάζας, m, ολισθαίνει σε κατακόρυφη ράβδο. Το ελατήριο είναι ασυμπίεστο όταν το δακτυλίδι βρίσκεται στη θέση A.

Στη θέση C το μήκος του ελατηρίου είναι:

$$l^2 = l_0^2 + y^2 \Rightarrow l = \sqrt{l_0^2 + y^2} \Rightarrow l = 1.25\, m$$

(i) Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, ΑΔΜΕ, έχουμε ότι:

$$T_A + V_A = T_C + V_C \Rightarrow 0 + \cancel{V_{A_{Βαρ.}}}^{0} + \cancel{V_{A_{Ελατ}}}^{0} = T_C + V_{C_{Βάρ.}} + V_{C_{Ελατ}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m |\bar{u}_C|^2 + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 - mgy$$ (το επίπεδο αναφοράς είναι στο A.)

$$\Rightarrow |\bar{u}_C|^2 = 2gy - \frac{k}{m}(l - l_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\bar{u}_C| = \sqrt{2gy - \frac{k}{m}(l - l_0)^2} \Rightarrow |\bar{u}_C| = \sqrt{\frac{157}{8}} \simeq 4.43\, (m/s)$$

και η φορά της ταχύτητας $\bar{u}_C$ είναι προς τα κάτω.

(ii) Από ΑΔΜΕ έχουμε πάλι ότι:

$$T_A + \cancel{V_A}^{0} = T_C + V_{C_{Ελατ}} + V_{C_{Βαρ}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m |\bar{u}_A|^2 = \frac{1}{2} m |\bar{u}_C|^2 + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 - mgy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\bar{u}_C|^2 = |\bar{u}_A|^2 + 2gy - \frac{k}{m}(l - l_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\bar{u}_C| = \sqrt{|\bar{u}_A|^2 + 2gy - \frac{k}{m}(l - l_0)^2} \Rightarrow |\bar{u}_C| = \sqrt{\frac{189}{8}} \simeq 4.86\, (m/s)$$

και πάλι η φορά της $\bar{u}_C$ είναι προς τα κάτω